

Εξέταση Απειροστικού Λογισμού Ι

- 1) (1 μονάδα) Ναδειχθεί με εις άστρον απτγωγή ή διαφορετικό ότι η παρακάτω αναδρομικάς ορισμένη ακολουθία δε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) (a_n - 10), \quad n \geq 1, \quad a_1 = 0.$$

- 2) (1 μονάδα) Αν μια ακολουθία έχει όριο πραγματικό αριθμό, να δείξετε ότι αυτό είναι μοναδικό.

- 3) (1.5 μονάδα) Να δείξετε ότι

$$a) \frac{n^2}{n!} \rightarrow 0, \quad b) (n!)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, \quad c) \frac{n^2}{4^n} \rightarrow 0.$$

- 4) (0.5 μονάδα) Να δείξετε ότι το παρακάτω όριο δεν υπάρχει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

- 5) (1 μονάδα) Να βρεθεί (όπου υπάρχει) η παράγωγος της

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- 6) (1 μονάδα) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.

- 7) (1 μονάδα) Με χρήση του ορισμού ναδειχθεί ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1} = 2$$

- 8) (0.5 μονάδα) Να δείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$x = \cos x$$

- 9) (1 μονάδα) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο c , τότε είναι συνεχής στο c .

- 10) (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

- 11) (1.5 μονάδα) Αν f, g ορισμένες στο $[a, b]$, $f(a) = g(a) = 0$, $g' \neq 0$ στο (a, b) , f, g διαφορίσιμες στο $[a, b]$ με $g'(a) \neq 0$, να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$